ΘΕΩΡΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ

Ιούνιος 2014

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η διάρκεια των εξετάσεων είναι τρεις ώρες. Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα (2.5 μονάδες το καθένα). **Καλή Επιτυχία.**

Θέμα 1 : i) Να βρεθεί η βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της συνάρτησης x^2+1, ορισμένης στο διάστημα $[-1,1]$, στον P_1, χρησιμοποιώντας πολυώνυμα Chebyshev.
ii) Ποιά θα είναι η βέλτιστη προσέγγιση της ίδιας συνάρτησης στον P_0 και γιατί;

Θέμα 2 : Να βρεθεί η βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της $f \in X_5$, στον P_2, όπου

$$X_5 = \{0,1,2,3,4\} \quad \text{και} \quad \begin{array}{c|ccccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline f_i & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array},$$

χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο εναλλαγής σημείων ξεκινώντας με $x_\sigma = \{0,1,2,3\}$.

Θέμα 3 : Να βρεθεί η προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων της συνάρτησης $f \in X_5$, στον P_2, όπου

$$X_5 = \{0,1,2,3,4\} \quad \text{και} \quad \begin{array}{c|ccccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline f_i & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array},$$

χρησιμοποιώντας ορθογώνια πολυώνυμα.

Θέμα 4 : Να βρεθεί η κυβική συνάρτηση spline στο $[0,2]$ που προσεγγίζει τη συνάρτηση f η οποία δίνεται στο σύνολο σημείων

$$X_3 = \{0,1,2\}, \quad \begin{array}{c|ccc} x_i & 0 & 1 & 2 \\ \hline f_i & 0 & 1 & 0 \end{array}.$$

και $f'(0) = 0, f'(2) = -4$.
Δίνεται ότι το πολυώνυμο παρεμβολής Hermite στο διάστημα $[x_j, x_{j+1}]$ είναι

$$\begin{aligned} s(x) &= f_j \left[\frac{(x-x_{j+1})^2}{(\Delta x_j)^2} + 2\frac{(x-x_j)(x-x_{j+1})^2}{(\Delta x_j)^3}\right] + f_{j+1}\left[\frac{(x-x_j)^2}{(\Delta x_j)^2} - 2\frac{(x-x_{j+1})(x-x_j)^2}{(\Delta x_j)^3}\right] \\ &+ s'_j\left[\frac{(x-x_j)(x-x_{j+1})^2}{(\Delta x_j)^2}\right] + s'_{j+1}\left[\frac{(x-x_{j+1})(x-x_j)^2}{(\Delta x_j)^2}\right]. \end{aligned}$$